單元 3：二次方程及二次函數

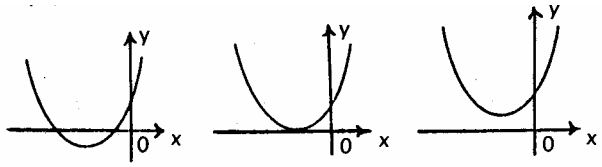
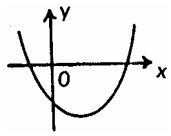
特定目標：

1. 學習以配方法及求根公式解二次方程的技巧。
2. 確定二次方程的根的性質。
3. 求二次函數的極大值和極小值。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
3.1 二次方程的解法	8 *	教師應先利用例子如 $x^2 - 8x + 9=0$，後再利用 x^2 係數不等於 1 的其他例子如 $3x^2-6x-14=0$ 去介紹配方法解二次方程。當學生已熟習這技巧後，教師可嘗試利用同一方法去推導出二次方程 $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ 求根公式： $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ 。 學生應沒有運用求根公式的困難，並應探究二次方程的兩根α、β的和及積與其係數 a、 b、 c 的關係。學生應牢記 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ 與 $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ 這兩個關係，然後再應用於其他計算方面，如求 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ 、$\alpha^2 + \beta^2$ 和 $\alpha^3 + \beta^3$ 的值、及依據已知條件作出二次方程的練習。 教師應討論由一線性方程及一二次方程組成的聯立方程的解法，代數方法與圖解法也要同時介紹。圖解法最能有效地解釋為何二次方程會有兩個相異根或是兩個相同根、甚至無實根。教師應強調圖解法帶出的幾何意義。
3.2 根的性質	4	教師應引導學生去發現二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的性質是由它的判別式 $D = b^2 - 4ac$ 所確定。學生應能清楚分辨二次方程的根是否實數、還是~~複數~~非實數；是相同、還是相異；是有理數、還是無理數。 例如：二次方程 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$，其中 a、b、c 是相異整數，它的判別式是 $(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=(a+c-2b)^2$。這可引出方程的兩根是有理數。同樣，學生應看出那兩根在 $a + c - 2b = 0$ 的情況下是相同的。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
3.3 二次函數	4	教師應給予學生有關的練習。以下是一個例子： *例* 求 m 值的範圍，使得以下方程的根為實數。 $y = m(x+2)$ $y^2 = 8x$ 在這例子中，學生應能找出 $m^2x^2 + (4m^2 - 8)x + 4m^2 = 0$ 的方程、及 $(4m^2 - 8)^2 - 16m^4 \geq 0$ 這條件。 學生應能運用配方法把代數式 ax^2+bx+c 寫成 $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ 的形式。教師應引導學生去確定二次函數 ax^2+bx+c 的極大值 (若 $a<0$) 或極小值 (若 $a>0$) 為 $\frac{4ac-b^2}{4a}$，而 x 的對應值為 $-\frac{b}{2a}$。學生也應知道直線 $x = -\frac{b}{2a}$ 是二次函數 ax^2+bx+c 的對稱軸。 教師可與學生討論二次函數 $ax^2 + bx + c$ 的圖像，同時引導學生總結以下不同的情況：

a	b	c
>0	>0	>0
	=0	=0
<0	<0	<0

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		在以上十八個情況下，可能會有一個或三個情況對應於一個或三個判別式的可能數值。例如，當 a＞0、b＞0、c＞0，下面是三個可能情況：  但當 a＞0、b＜0、c＜0，那時只有如下的一個可能性：  $b^2-4ac>0$ 教師應鼓勵學生於解二次方程或二次不等式時，將有關的二次函數作出簡單的草圖。 有關二次函數的練習，可包括以下例子。 *例一* 求以下代數式的極大值或極小值。 (*a*) x^2-8x+9 (*b*) $6+6x-x^2$ (*c*) $\frac{1}{x^2-6x+11}$

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		例二 求 m 和 n 的值，得使以下數式恆為正數。 (*a*) $3x^2+2x+m$ (*b*) nx^2-5x+4
	8* + 8	