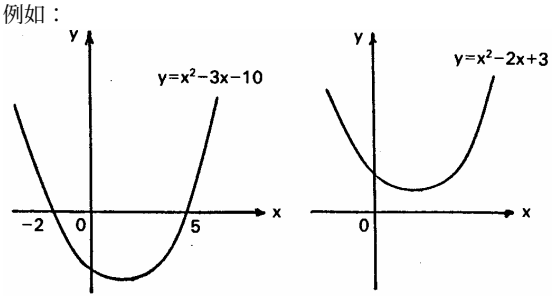
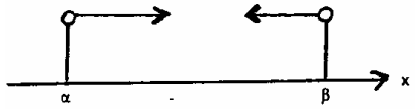
單元 6：不等式

特定目標：

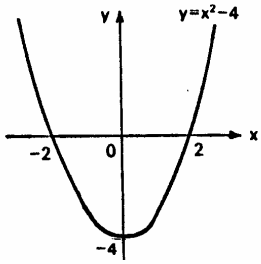
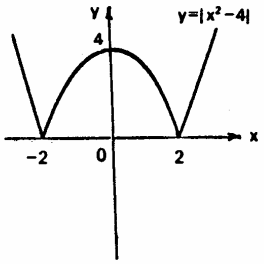
1. 理解不等式的基本法則。
2. 解一元一次不等式。
3. 解一元二次不等式。
4. 解 $\frac{ax+b}{cx+d} \geq k$ 形式的不等式。
5. 解含絕對值的一次和二次不等式。
6. 證明簡單的絕對不等式。

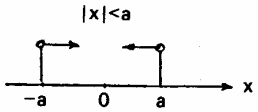
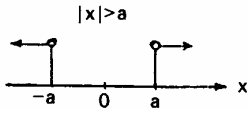
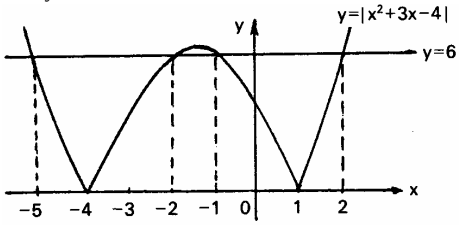
內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
6.1 不等式的基本法則	1*	教師宜強調若 a–b 是一個正數，則 a > b，而且它的逆定理亦成立。利用這個事實，可導出下列的基本法則。 對實數 a、b、c： (1) 若 a > b，且 b > c，則 a > c。 (2) 則 a > b，則 a + c > b + c。 (3) 則 a > b，則 (a) ac > bc 若 c > 0。 (b) ac < bc 若 c < 0。 (c) ac = bc 若 c = 0。
6.2 一元一次不等式	1*	利用基本法則來證明不等式的簡單問題亦須介紹。 教師宜提示學生解線性不等式的方法和解線性方程的方法很類似。唯一的分別是當一條不等式被乘或除以一個負數時，則不等號須反向。

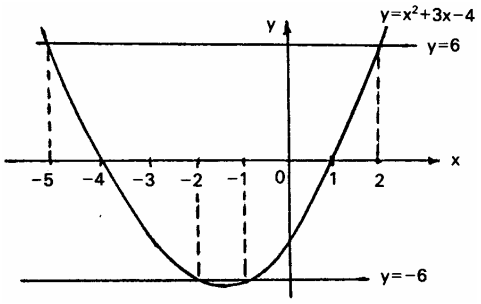
內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		對學生來說，將不等式的解描繪出來是一個很好的做法。在解複不等式時，將各解描畫在同一數線上對解題特別有幫助。下列是兩個典型的例子： *例一* 解複不等式： $7x-3<5x+1$ 及 $\frac{x}{2}<x+\frac{1}{2}$ *例二* 解複不等式： $\frac{2(x+1)}{5}<\frac{3(1-x)}{7}$ 或 $2-\frac{4-5x}{4}<\frac{7x+1}{8}$
6.3 一元二次不等式	1*+2	圖解法、因式分解法和列表法等都是解二次不等式的方法。 學生曾在初中學習二次方程的圖解法。因此，他們可用圖像來解二次不等式。例如：  由圖像中，不難看出不等式 $x^2-3x-10>0$ 的解是 $x<-2$ 或 $x>5$,

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		$x^2-3x-10\le 0$ 的解是 $-2\le x\le 5$， $x^2-2x+3>0$ 的解是所有實數，及 $x^2-2x+3<0$ 無實數解。 解二次不等式的方法與解二次方程的方法很相似。先將各項重新排列，令右方零，然後在可能情況下將左方的二次因式分解。所得的不等式可用下列事例求解： (1) 若 $ab>0$，則 $\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$。 (2) 若 $ab<0$，則 $\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$。 牢記下列兩個結果有助解題，設 $\alpha>\beta$ ： (1) 若 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$，則解是 $\alpha<x<\beta$ 且圖像是  (2) 若 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$，則解是 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$ 且圖像是

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		須給予學生做適量的習作以掌握此技巧。 當二次式不能被因式分解時，教師須提示學生將該式轉換成 $(x+c)^2+d>0$ 或 $\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)>0$ 等的形式。 若使用列表法解 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 等的不等式時。學生要作表逐一列出當 $x<\alpha$，$\alpha<x<\beta$ 及 $x>\beta$ 時 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 的符號。 下列例子可予介紹： *例一* 解不等式 $3x^2>7x-1$。 *例二* 證明對所有實數 x，函數 $y=\frac{x-1}{x^2+3}$ 的值一定在 $-\frac{1}{2}$ 至 $\frac{1}{6}$ 的範圍內。 *例三* 分別對下列各情況解 $x>\frac{2}{x}+1$ ： (a) $x>0$ (b) $x<0$ 由此求不等式 $x>\frac{2}{x}+1$ 的全解。
6.4 形式如 $\frac{ax+b}{cx+d}\ge k$ 的不等式	2	必須強調：若將一個形式如 $\frac{ax+b}{cx+d}\ge k$ 的不等式乘以一個含未知數的因式，則因式是正或負的情況必須分別考慮。例如，解 $\frac{x+2}{x-4}\ge 1$ 或 $\frac{x+2}{x-4}-1\ge 0$ 時，$x>4$ 和 $x<4$ 的而種情況必須分別考慮。(學生須留意 $x\ne 4$)。不過，較簡便的方法是將不等式乘以分母的平方，因而消去分母，變成 $(x+2)(x-4)\ge(x-4)^2$。事實上，這形式的不等式可用列表法求解。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
6.5 絕對值	1	*例* 解不等式 $\frac{2x+5}{4x-3} \geq 1$ 必須清楚說明定義：$\lvert x \rvert = \begin{cases} x & 若\ x \geq 0 \\ -x & 若\ x < 0 \end{cases}$，亦須介紹 $y = \lvert x \rvert$ 的圖像。 教師須提示學生在描繪含絕對值的簡單函數時，必須首先將絕對值符號移去。例如，將 $y = \lvert x^2 - 4 \rvert$ 的絕對值符號移去後，便得如圖 1 的圖像。因為在 $y = \lvert x^2 - 4 \rvert$ 中，y 是非負數的，故此所求的圖像將如圖 2 所示。  圖 1  圖 2
6.6 含絕對值的不等式	3	這類型的不等式可用圖解法或代數法求解。學生會發覺若將 $\lvert x \rvert$ 看成在數線上 x 與原點的距離，則有助理解 $\lvert x \rvert$ 的意義。依這想法，$\lvert x - y \rvert$ 將代表在數線上 x 和 y 兩點間的距離。 下列的事實值得牢記：

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		(1) 若 $\lvert x \rvert < a$，則 $-a < x < a$。 (2) 若 $\lvert x \rvert > a$，則 $x < -a$ 或 $x > a$。 下列兩幅圖表可用作說明   *例* 解不等式 $\lvert x^2 + 3x - 4 \rvert \geq 6$ 這不等式的解可由 $y = \lvert x^2 + 3x - 4 \rvert$ 的圖像獲得  另外，不等式的解亦可由 $y = x^2 + 3x - 4$ 的圖像求得。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
6.7 絕對不等式	1	 從代數觀點，這不等式等價於 $x^2+3x-4\le -6$ 或 $x^2+3x-4\ge 6$，簡化後可得解： $x\le -5$， $-2\le x\le -1$ 或 $x\ge 2$ 亦可介紹像 $\big\lvert\,\lvert x+1\rvert-\lvert x-1\rvert\,\big\rvert<1$ 的較複雜例子。在處理這類不等式時，可考慮 x 在不同區間的情況，然後將絕對值符號移去。教師必須清楚說明如何確定 x 的不同區間。對每一區間，不等式都分別求解，然後將各解綜合起來求全解。 學生會發覺將個別的解畫在同一數線上對求全解極有幫助。 教師須提示學生：對所有實數 x， $x^2\ge 0$。 教師亦可導出下列不等式： $a^2+b^2\ge 2ab$ 及 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ 其中 $a>0$，$b>0$

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		一個常用以證明 $x>y$ 的方法是證明不等式 $x-y>0$ 能夠成立。 用以上兩個事實，教師可和學生討論一些簡單的絕對不等式，例如： $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$
	3* + 9	